



NÍVEL 1

Questão 1

Renata usa várias cartelas de adesivos, iguais à da figura ao lado, para montar igualdades. Por exemplo, para montar a igualdade abaixo, ela usou somente três cartelas.

$$(2) (3) (+) (1) (3) (-) (1) (2) = (2) (4)$$

Cartela de Adesivos			
0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	+	-

- a) Renata montou uma igualdade e seu irmão retirou três adesivos, como mostrado abaixo. Mostre como era essa igualdade.

(Nas figuras do gabarito, os adesivos retirados aparecem tracejados, já preenchidos em verde.)

$$(9) (6) (-) (1) (3) = (8) (3)$$

Resposta: $96 - 13 = 83$.

Os sinais só podem ser + ou -. Com +, teríamos $96 + 13 = 109$, que tem três algarismos, mas o resultado tem só dois. Logo o sinal é -, e $96 - 13 = 83$.

- b) Renata montou uma igualdade e seu irmão retirou três adesivos, como mostrado abaixo. Mostre como era essa igualdade.

$$(2) (4) (-) (2) (0) (+) (2) (5) = (2) (9)$$

Resposta: $24 - 20 + 25 = 29$.

Testando os quatro pares de sinais: $24 + 20 + 25 = 69$; $24 + 20 - 25 = 19$; $24 - 20 + 25 = 29$; $24 - 20 - 25 < 0$. A única possibilidade com resultado da forma $2_$ é $24 - 20 + 25 = 29$.

- c) Na igualdade abaixo, Renata usou duas cartelas e seu irmão retirou quatro adesivos. Mostre como era a igualdade.

$$(3) (2) (+) (1) (8) (-) (1) (2) = (3) (8)$$

Resposta: $32 + 18 - 12 = 38$.

Com duas cartelas, cada símbolo pode aparecer no máximo duas vezes. Os adesivos que sobraram já usam o 3 duas vezes e o 2 duas vezes, então nenhum adesivo retirado pode ser 2 ou 3.

Chamando de $\square 2$ o terceiro número:

- $32 + 18 + \square 2 \geq 52$ e $32 - 18 - \square 2 \leq 12$: impossíveis (o resultado é da forma $3_$).
- $32 - 18 + \square 2 = 14 + \square 2$ está entre 30 e 39 só se $\square 2 = 22$, o que exigiria um terceiro adesivo 2: impossível.
- $32 + 18 - \square 2 = 50 - \square 2$ está entre 30 e 39 só se $\square 2 = 12$, dando 38. Isso usa dois adesivos 1, dois 8, um + e um -: possível.

Questão 2

Gardênia e Hortênsia jogam uma série de partidas em que, em cada uma delas, não há empate. O resultado de cada partida é anotado como **G**, no caso de vitória de Gardênia, ou **H**, no caso de vitória de Hortênsia. Por exemplo, uma série de três partidas, em que Hortênsia vence pelo placar de 2 a 1, pode acontecer de três maneiras:

- H-H-G: Hortênsia vence as duas primeiras partidas;
- H-G-H: Hortênsia vence a primeira e a última partida;
- G-H-H: Hortênsia vence as duas últimas partidas.

a) Liste todas as maneiras nas quais uma série de quatro partidas pode terminar empatada em 2 a 2.

Resposta: 6 maneiras: GGHH, GHGH, GHHG, HGGH, HGHG, HHGG.

Basta escolher em quais 2 das 4 partidas Gardênia venceu: são 6 escolhas.

b) De quantas maneiras Gardênia pode vencer uma série de cinco partidas, considerando todos os placares possíveis?

Resposta: 16 maneiras.

Gardênia vence se fizer 3, 4 ou 5 pontos. Placar 5 a 0: 1 maneira. Placar 4 a 1: a derrota pode ser em qualquer uma das 5 partidas, 5 maneiras. Placar 3 a 2: escolhemos as 2 partidas perdidas entre 5, ou seja, 10 maneiras. Total: $1 + 5 + 10 = 16$.

c) Gardênia venceu uma série de cinco partidas. Ao longo da série, ninguém ficou com mais de dois pontos de vantagem. De quantas maneiras essa série pode ter acontecido?

Resposta: 9 maneiras.

Se o placar final fosse 5 a 0 ou 4 a 1, a vantagem final de Gardênia seria 5 ou 3, maior que 2. Então o placar foi 3 a 2, que acontece de 10 maneiras (item b). Hortênsia nunca chega a 3 pontos de vantagem, pois só fez 2 pontos. Gardênia passa de 2 pontos de vantagem só se vencer as três primeiras (GGGHH). Sobram $10 - 1 = 9$:

GGHGH, GGHHG, GHGGH, GHGHG, GHHGG, HGGGH, HGGHG, HGHGG, HHGGG.

Questão 3

Uma brincadeira começa com a lista dos números de 1 a 9, como mostrado na figura. Em cada passo da brincadeira, uma lista menor é formada a partir da lista maior anterior, da seguinte maneira:

- dois números quaisquer são escolhidos e retirados da lista;
- após esses números serem retirados, a diferença entre o maior e o menor deles é escrita no final da nova lista. Caso os números retirados sejam iguais, é escrito 0 no final da lista.

A brincadeira termina quando sobrar um único número. A figura mostra um exemplo de três passos dessa brincadeira.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Passo 1 (retira 7 e 3; escreve 7 - 3)

1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 4

Passo 2 (retira 4 e 4; escreve 0)

1, 2, 5, 6, 8, 9, 0

Passo 3 (retira 9 e 0; escreve 9 - 0)

1, 2, 5, 6, 8, 9

a) Após o primeiro passo, qual é o maior número que pode ser escrito no final da lista?

Resposta: 8.

No primeiro passo, os números são distintos, de 1 a 9. A maior diferença possível é $9 - 1 = 8$.

b) Após o primeiro passo, a lista pode ficar com exatamente 4 números ímpares? Justifique sua resposta.

Resposta: Não.

A lista inicial tem 5 ímpares (1, 3, 5, 7, 9). Retirando dois ímpares, entra um par (a diferença de dois ímpares é par): ficam 3 ímpares. Retirando dois pares, entra um par: continuam 3. Retirando um par e um ímpar, entra um ímpar: continuam 3. Logo, após o primeiro passo, a lista tem 3 ou 5 ímpares, nunca 4.

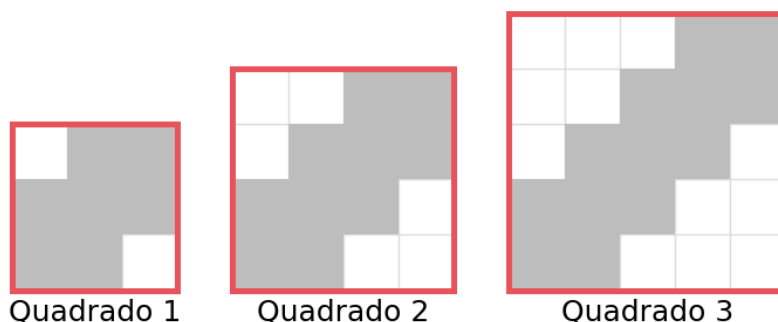
c) Explique por que o número que sobra no final da brincadeira é sempre ímpar.

Resposta: A paridade da soma nunca muda.

Quando retiramos a e b ($a \geq b$) e escrevemos $a - b$, a soma da lista diminui $(a + b) - (a - b) = 2b$, um número par. Logo a soma da lista mantém sempre a mesma paridade. No início, a soma é $1 + 2 + \dots + 9 = 45$, ímpar. No final, a "soma" é o próprio número que sobra, então ele é ímpar.

Questão 4

João desenhou quadrados de contorno vermelho em um quadriculado formado por quadradinhos cujos lados medem 1 cm. Dentro de cada um desses quadrados, ele desenhou quadrados sobrepostos, de tamanho 2×2 , pintou-os de cor cinza e, a seguir, apagou as linhas interiores. Na figura vemos os três primeiros quadrados que João desenhou.



O comprimento do contorno da região cinza no interior do Quadrado 2 é 16 cm e sua área é 10 cm^2 ; já o contorno de uma das regiões brancas no Quadrado 3 mede 12 cm e sua área é 6 cm^2 .

Observação geral. O Quadrado n tem lado $n + 2$ e contém $n + 1$ quadrados cinza 2×2 em escada, cada um sobrepondo o anterior em 1 quadradinho. Área cinza: $4 + 3n \text{ cm}^2$. Cada região branca é uma "escadinha" com $1 + 2 + \dots + n = n(n + 1)/2$ quadradinhos.

a) Qual é a área da região cinza no interior do Quadrado 3?

Resposta: 13 cm^2 .

São 4 quadrados 2×2 (área 16), com 3 sobreposições de 1 cm^2 : $16 - 3 = 13$. (Ou: $25 - 6 - 6 = 13$.)

b) Dentro de cada quadrado há sempre duas regiões brancas. Se João continuar a construção, qual será a área total das duas regiões brancas no interior do Quadrado 10?

Resposta: 110 cm^2 .

O Quadrado 10 tem lado 12, área 144. A área cinza é $4 + 3 \cdot 10 = 34$. As regiões brancas somam $144 - 34 = 110 \text{ cm}^2$ (55 cm^2 cada, pois $1 + 2 + \dots + 10 = 55$).

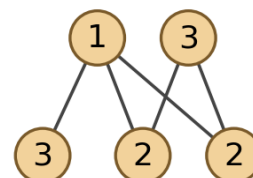
c) Se João continuar a construção, qual será a diferença entre as medidas dos contornos da região cinza e de uma das regiões brancas no interior do Quadrado 2026?

Resposta: 8 cm.

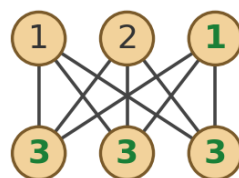
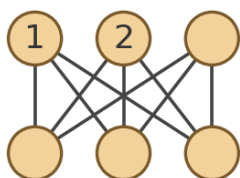
Uma figura em escada tem o mesmo contorno do retângulo que a envolve, pois cada "degrau" troca um trecho horizontal e um vertical por trechos de mesmo comprimento total. A região cinza do Quadrado n é envolvida pelo quadrado de lado $n + 2$, logo seu contorno é $4(n + 2) = 4n + 8$. (Confere: Quadrado 2, 16 cm.) Cada região branca é envolvida por um quadrado de lado n , com contorno $4n$. (Confere: Quadrado 3, 12 cm.) Para $n = 2026$: $8112 - 8104 = 8 \text{ cm}$. A diferença é 8 cm para qualquer quadrado.

Questão 5

Os círculos dos diagramas abaixo devem ser preenchidos com os números 1, 2 ou 3, um número em cada círculo, de forma que círculos ligados por um segmento tenham números diferentes. A figura ao lado mostra um possível preenchimento de um diagrama.



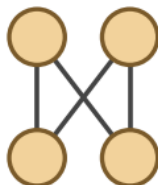
a) Complete o diagrama abaixo com um possível preenchimento correto.



Resposta: Em cima: 1, 2, 1 (ou 1, 2, 2). Embaixo: 3, 3, 3.

Cada círculo de baixo está ligado aos três de cima. Como em cima já aparecem 1 e 2, todos os círculos de baixo têm de ser 3. O terceiro círculo de cima só está ligado a círculos com 3, então pode ser 1 ou 2.

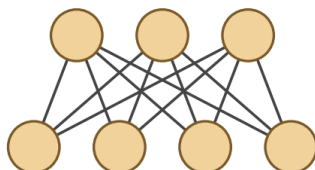
b) De quantas maneiras é possível preencher corretamente o diagrama abaixo?



Resposta: 18 maneiras.

Cada círculo de cima está ligado aos dois de baixo. Se os dois de cima têm o mesmo número (3 escolhas), cada círculo de baixo tem 2 opções: $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$. Se os de cima são diferentes ($3 \cdot 2 = 6$ escolhas), os de baixo têm de ser o número que falta: $6 \cdot 1 = 6$. Total: $12 + 6 = 18$.

c) De quantas maneiras é possível preencher corretamente o diagrama abaixo?



Resposta: 66 maneiras.

Cada círculo de cima está ligado aos quatro de baixo, então nenhum número pode aparecer ao mesmo tempo em cima e embaixo.

- Os três de cima iguais (3 escolhas): cada um dos 4 de baixo tem 2 opções, $2^4 = 16$. Total: $3 \cdot 16 = 48$.
 - Em cima usam exatamente dois números: escolhemos o par (3 modos) e preenchemos os 3 círculos com esses dois números usando ambos ($2^3 - 2 = 6$ modos): 18 preenchimentos. Embaixo, todos recebem o número restante: 1 modo. Total: 18.
 - Em cima usam os três números: embaixo não há opção. Total: 0.
- Ao todo: $48 + 18 = 66$.

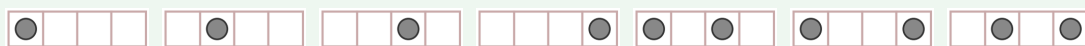
Questão 6

Fichas devem ser colocadas em tiras de quadradinhos de tal forma que duas fichas nunca fiquem lado a lado em quadradinhos vizinhos. Por exemplo, em uma tira com 3 quadradinhos, as fichas podem ser colocadas de 4 maneiras:



a) Em uma tira com 4 quadradinhos, as fichas podem ser colocadas de 7 maneiras. Mostre como as fichas podem ser colocadas nas tiras abaixo.

Resposta: as 7 maneiras são:



Uma ficha: em qualquer um dos 4 quadradinhos (4 maneiras). Duas fichas não vizinhas: casas 1 e 3, 1 e 4, ou 2 e 4 (3 maneiras). Três fichas não cabem.

- b) De quantas maneiras as fichas podem ser colocadas em tiras de 5 quadradinhos, sem colocar uma ficha na primeira casa?

Resposta: 7 maneiras.

Com a primeira casa vazia, as fichas ficam nas outras 4 casas, que formam uma tira de 4 quadradinhos: 7 maneiras (item a).

- c) De quantas maneiras as fichas podem ser colocadas em tiras de 5 quadradinhos, colocando uma ficha na primeira casa?

Resposta: 5 maneiras.

Com ficha na casa 1, a casa 2 fica vazia. Nas casas 3, 4 e 5 podemos não pôr nada (1 maneira) ou usar uma das 4 maneiras da tira de 3: $1 + 4 = 5$.

- d) De quantas maneiras as fichas podem ser colocadas em tiras de 8 quadradinhos?

Resposta: 54 maneiras.

Seja T_n o número de maneiras numa tira de n casas contando também a tira vazia. Pelo raciocínio dos itens b e c: se a casa 1 está vazia, sobram T_{n-1} maneiras; se tem ficha, a casa 2 fica vazia e sobram T_{n-2} . Logo $T_n = T_{n-1} + T_{n-2}$.

Com $T_1 = 2$ e $T_2 = 3$: 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55. Para 8 casas, $T_8 = 55$; tirando a tira vazia (que não conta como maneira, como no exemplo), são $55 - 1 = 54$. (Confere: 3 casas, $5 - 1 = 4$; 4 casas, $8 - 1 = 7$; 5 casas, $13 - 1 = 12 = 7 + 5$.)

Mais conhecimento de olimpíadas em: **inmea.org**

Questões obtidas do canal Planeta Matemática