



Questão 1 — Letras no lugar dos algarismos

Júlia usa letras coloridas no lugar dos algarismos de 0 a 9 para escrever igualdades. Letras diferentes representam algarismos diferentes.

a) Inicialmente Júlia escreve as igualdades $B + B = B$ e $F \times F = F$. Quais algarismos as letras B e F representam?

Resposta: B = 0 e F = 1

$$B + B = B \Rightarrow 2B = B \Rightarrow B = 0.$$

$F \times F = F \Rightarrow F(F - 1) = 0 \Rightarrow F = 0$ ou $F = 1$. Como letras diferentes representam algarismos diferentes e $B = 0$, temos $F = 1$.

b) Depois, Júlia escreve as igualdades $J^C = J \times J \times J = A$. Quais algarismos as letras J, C e A representam?

Resposta: J = 2, C = 3 e A = 8

$$J^C = J \times J \times J \text{ mostra que } C = 3.$$

$J \times J \times J = A$ precisa ter um só algarismo: $0^3 = 0$, $1^3 = 1$, $2^3 = 8$ e $3^3 = 27$. Como 0 e 1 já são B e F, $J = 2$ e $A = 8$.

Conferindo o exemplo do enunciado: $JC + A = 23 + 8 = 31 = CF$. ✓

Júlia junta as letras para formar números de dois ou mais algarismos. Por exemplo, ela escreve corretamente que $JC + A = CF$.

c) Para encerrar, Júlia faz a conta armada abaixo. Quais algarismos as letras D, I, E, H e G representam?

Resposta: D = 5, I = 6, E = 9, H = 7 e G = 4

$$\begin{array}{r} \\ \\ \times \\ \hline \\ \\ \\ \hline \\ \\ \hline \\ \\ \hline \end{array}$$

A conta é $22D \times 31$. A segunda linha parcial é $22D \times 3 = IHD$, logo $3 \cdot D$ termina em D, isto é, $2D$ é múltiplo de 10: $D = 0$ ou $D = 5$. Como $0 = B$, $D = 5$.

$$225 \times 3 = 675 \Rightarrow I = 6 \text{ e } H = 7. \text{ O resultado é } 225 \times 31 = 6975 = IEHD \Rightarrow E = 9.$$

Os algarismos já usados são 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9 (B, F, J, C, D, I, H, A, E). Sobra apenas o 4, logo $G = 4$.

Questão 2 — A brincadeira da lista de 1 a 9

Uma brincadeira começa com a lista dos números de 1 a 9, como mostrado na figura. Em cada passo da brincadeira, uma lista menor é formada a partir da lista maior anterior, da seguinte maneira:

- dois números quaisquer são escolhidos e retirados da lista;
- após esses números serem retirados, a diferença entre o maior e o menor deles é escrita no final da nova lista. Caso os números retirados sejam iguais, é escrito 0 no final da lista.

A brincadeira termina quando sobrar um único número. A figura mostra um exemplo de três passos dessa brincadeira.

	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Passo 1 (retira 7 e 3; escreve $7 - 3 = 4$)	1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 4
Passo 2 (retira 4 e 4; escreve $4 - 4 = 0$)	1, 2, 5, 6, 8, 9, 0
Passo 3 (retira 9 e 0; escreve $9 - 0 = 9$)	1, 2, 5, 6, 8, 9

a) Após o primeiro passo, qual é o maior número que pode ser escrito no final da lista?

Resposta: 8

A diferença entre dois números da lista 1, ..., 9 é no máximo $9 - 1 = 8$, e isso é possível retirando 9 e 1.

b) Após o primeiro passo, a lista pode ficar com exatamente 4 números ímpares? Justifique sua resposta.

Resposta: Não

A lista inicial tem 5 ímpares (1, 3, 5, 7, 9). Em um passo:

- retirando dois ímpares, a diferença é par: ficam $5 - 2 = 3$ ímpares;
- retirando um ímpar e um par, a diferença é ímpar: ficam $5 - 1 + 1 = 5$ ímpares;
- retirando dois pares, a diferença é par: continuam 5 ímpares.

Assim, após o primeiro passo a lista tem 3 ou 5 números ímpares — nunca exatamente 4.

c) Explique por que o número que sobra no final da brincadeira é sempre ímpar.

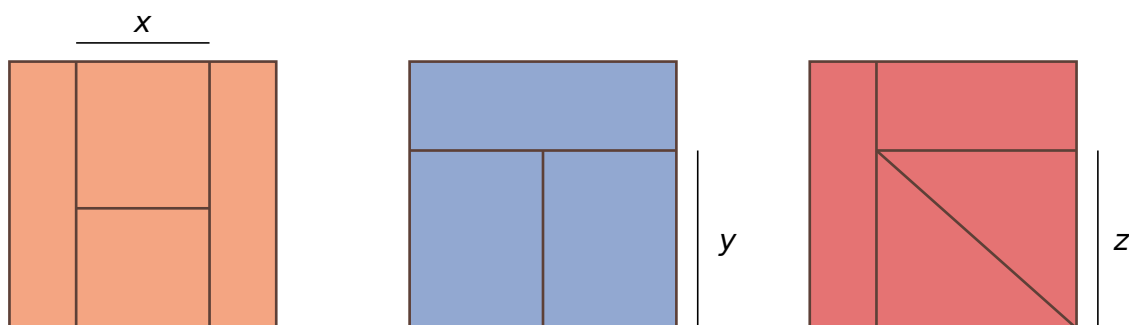
Resposta: A paridade da soma nunca muda

Ao trocar a e b ($a \geq b$) por $a - b$, a soma da lista diminui em $a + b - (a - b) = 2b$, que é par. Logo a paridade da soma da lista é sempre a mesma.

No início a soma é $1 + 2 + \dots + 9 = 45$, ímpar. Então a soma é sempre ímpar e, no final, quando sobra um único número, esse número é a própria soma: é ímpar.

Questão 3 — Quadrados divididos em regiões de mesma área

Cada um dos três quadrados abaixo tem lados de medida 6 cm e foi dividido em regiões de mesma área.



Cada quadrado tem área $6 \times 6 = 36 \text{ cm}^2$.

a) Qual é o comprimento x ?

Resposta: $x = 3 \text{ cm}$

São 4 regiões, cada uma com $36 \div 4 = 9 \text{ cm}^2$. A faixa do meio (largura x , altura 6) contém 2 regiões: $6x = 18 \Rightarrow x = 3 \text{ cm}$. (As faixas laterais têm largura 1,5 cm e área 9 cm^2 cada. ✓)

b) Qual é o comprimento y ?

Resposta: $y = 4 \text{ cm}$

São 3 regiões, cada uma com 12 cm^2 . A faixa de cima tem largura 6 e área 12, logo altura 2 cm. Portanto $y = 6 - 2 = 4 \text{ cm}$ (cada retângulo de baixo tem $3 \times 4 = 12 \text{ cm}^2$. ✓)

c) Qual é o comprimento z ?

Resposta: $z = 4 \text{ cm}$

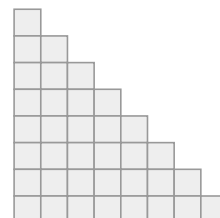
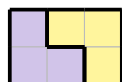
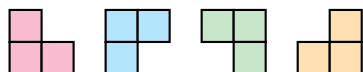
São 4 regiões de 9 cm^2 cada. A faixa da esquerda tem altura 6: largura $9 \div 6 = 1,5 \text{ cm}$, então a parte da direita tem largura $6 - 1,5 = 4,5 \text{ cm}$.

O retângulo de cima tem largura 4,5 e área 9: altura 2 cm.

O triângulo tem base z (no lado direito do quadrado) e altura 4,5: $(z \times 4,5) \div 2 = 9 \Rightarrow z = 4 \text{ cm}$. A região restante também tem 9 cm^2 . ✓

Questão 4 — Tabuleiros cobertos por peças em L

Gabriela cobre tabuleiros triangulares e tabuleiros retangulares com peças no formato da letra L, formadas por três quadradinhos iguais aos quadradinhos do tabuleiro, sem que haja sobreposição. Ela tem peças suficientes para cobrir tabuleiros de quaisquer tamanhos.



Retângulo 2×3 coberto por

Peças em L (em qualquer posição)

2 peças

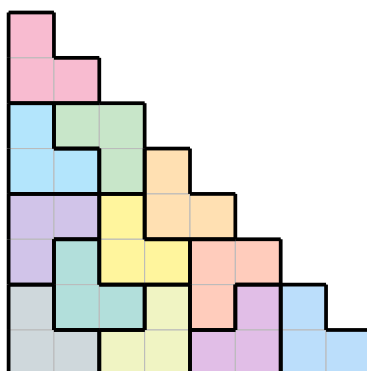
Tabuleiro triangular de base 8

O tabuleiro triangular de base n tem $1 + 2 + \dots + n = n(n + 1)/2$ quadradinhos, e cada peça cobre 3.

a) Mostre como Gabriela pode cobrir um tabuleiro triangular de base 8.

Resposta: Uma cobertura possível (12 peças)

O tabuleiro de base 8 tem 36 quadradinhos = 12 peças. Uma cobertura:



b) Explique por que Gabriela nunca vai conseguir cobrir um tabuleiro triangular de base 7.

Resposta: 28 não é múltiplo de 3

O tabuleiro de base 7 tem $1 + 2 + \dots + 7 = 28$ quadradinhos. Cada peça cobre 3 quadradinhos, então seria preciso ter $28 = 3 \times (\text{número de peças})$, mas 28 não é múltiplo de 3. Logo é impossível.

c) Explique por que Gabriela sempre pode cobrir um tabuleiro triangular de base $6k$, para qualquer $k = 1, 2, 3, \dots$

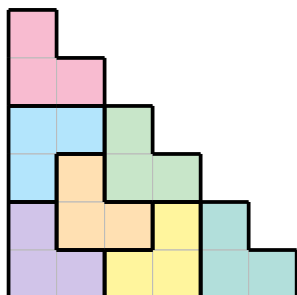
Resposta: Por indução, juntando pedaços que já sabemos cobrir

Base 6: o tabuleiro de base 6 (21 quadradinhos) pode ser coberto por 7 peças, como na figura abaixo.

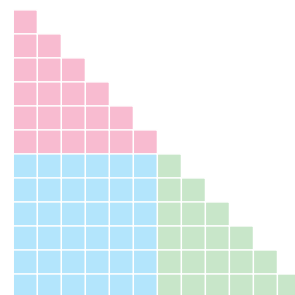
Retângulos 2×3 : são cobertos por 2 peças em L; logo qualquer retângulo $6 \times 6m$ (formado por retângulos 2×3) também pode ser coberto.

Passo: o tabuleiro de base $6k$ pode ser dividido em: o tabuleiro de base $6(k - 1)$ (as primeiras $6(k - 1)$ linhas), um retângulo de 6 linhas por $6(k - 1)$ colunas (à esquerda, nas últimas 6 linhas) e um tabuleiro de base 6 (à direita, nas últimas 6 linhas).

O retângulo e o triângulo de base 6 podem ser cobertos, e o de base $6(k - 1)$ também (pelo caso anterior). Começando de $k = 1$ e repetindo o argumento, cobrimos as bases 6, 12, 18, ..., ou seja, $6k$ para todo k .



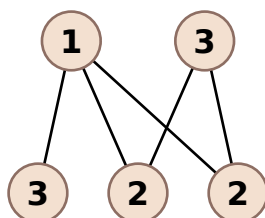
Base 6 coberta por 7 peças



■ base $6(k-1)$
■ retângulo $6 \times 6(k-1)$
■ base 6
(exemplo com $k = 2$)

Questão 5 — Diagramas com os números 1, 2 e 3

Os círculos dos diagramas abaixo devem ser preenchidos com os números 1, 2 ou 3, um número em cada círculo, de forma que círculos ligados por um segmento tenham números diferentes. A figura abaixo mostra um possível preenchimento de um diagrama.



a) Complete o diagrama abaixo com um possível preenchimento correto.

Resposta: Os três de baixo recebem 3 e o de cima à direita recebe 1 (ou 2)

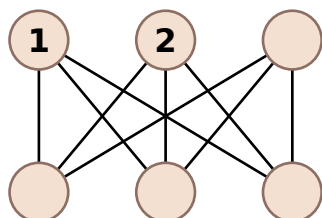
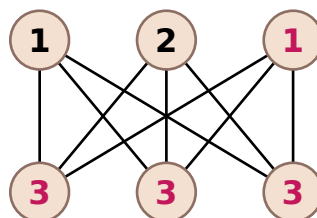


Diagrama do enunciado

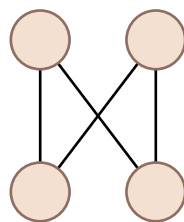


Um preenchimento correto

Cada círculo de baixo está ligado ao 1 e ao 2, então todos os de baixo são 3. O círculo de cima à direita está ligado aos de baixo (que são 3), então pode ser 1 ou 2.

b) De quantas maneiras é possível preencher corretamente o diagrama abaixo?

Resposta: 18 maneiras



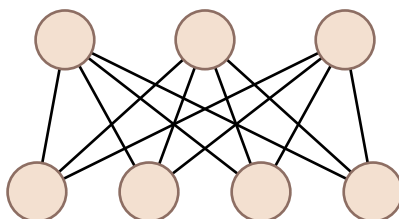
Cada círculo de cima está ligado aos dois de baixo, e os de cima não estão ligados entre si.

- Se os dois de cima têm o mesmo número (3 opções), cada um de baixo pode receber qualquer um dos outros 2 números: $3 \times 2 \times 2 = 12$.
- Se os de cima têm números diferentes ($3 \times 2 = 6$ opções), os de baixo só podem receber o terceiro número: $6 \times 1 = 6$.

Total: $12 + 6 = 18$.

c) De quantas maneiras é possível preencher corretamente o diagrama abaixo?

Resposta: 66 maneiras



Cada um dos 3 círculos de cima está ligado a cada um dos 4 de baixo; assim, nenhum número usado em cima pode aparecer embaixo.

- Em cima, um único número (3 opções): embaixo, cada um dos 4 círculos recebe um dos outros 2 números: $3 \times 2^4 = 48$.
- Em cima, exatamente dois números: escolhemos o par (3 opções) e preenchemos os 3 círculos usando os dois ($2^3 - 2 = 6$ maneiras); embaixo, todos recebem o terceiro número: $3 \times 6 = 18$.
- Em cima, os três números: não sobra número para os de baixo (0 maneiras).

Total: $48 + 18 = 66$.

Questão 6 — Conjuntos quadruplexos

Um conjunto de algarismos não nulos é chamado de **quadruplexo** quando o quádruplo de um de seus elementos é igual à soma de todos os outros elementos. Por exemplo, $\{2, 3, 5\}$, $\{2, 4, 6, 8\}$ e $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ são quadruplexos:

$$\{2, 3, 5\}: 4 \times 2 = 3 + 5$$

$$\{2, 4, 6, 8\}: 4 \times 4 = 2 + 6 + 8$$

$$\{1, 2, \dots, 8, 9\}: 4 \times 9 = 1 + 2 + \dots + 8$$

a) Encontre um conjunto quadruplexo com cinco elementos.

Resposta: Por exemplo, $\{1, 2, 4, 6, 7\}$

$4 \times 4 = 16 = 1 + 2 + 6 + 7$. ✓ (Outro exemplo: $\{1, 4, 5, 6, 9\}$, pois $4 \times 5 = 20 = 1 + 4 + 6 + 9$.)

b) Explique por que a soma dos elementos de um conjunto quadruplexo é sempre um múltiplo de 5.

Resposta: A soma é 5 vezes um dos elementos

Se a é o elemento cujo quádruplo é a soma dos outros, a soma de todos os elementos é $a + 4a = 5a$, que é múltiplo de 5.

c) Encontre um conjunto quadruplexo com oito elementos.

Resposta: $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$

Com oito algarismos não nulos, falta apenas um algarismo m e a soma é $45 - m$. Ela deve ser múltipla de 5, então $m = 5$ e a soma é $40 = 5 \times 8$, ou seja, $a = 8$.

Conferindo: $4 \times 8 = 32 = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 9$. ✓

d) Explique por que existem somente seis conjuntos quadruplexos com sete elementos.

Resposta: Contando os pares de algarismos que faltam

Com sete elementos, faltam dois algarismos, de soma s ($3 \leq s \leq 17$). A soma do conjunto é $45 - s = 5a$, logo s é múltiplo de 5: $s = 5, 10$ ou 15 . Além disso, $a = (45 - s)/5$ precisa estar no conjunto, isto é, não pode ser um dos que faltam.

- $s = 5 \Rightarrow a = 8$. Pares que faltam: $\{1, 4\}$ e $\{2, 3\}$ — 2 conjuntos.

- $s = 10 \Rightarrow a = 7$. Pares: $\{1, 9\}$, $\{2, 8\}$, $\{3, 7\}$, $\{4, 6\}$; o par $\{3, 7\}$ não serve (tira o 7) — 3 conjuntos.

- $s = 15 \Rightarrow a = 6$. Pares: $\{6, 9\}$, $\{7, 8\}$; o par $\{6, 9\}$ não serve (tira o 6) — 1 conjunto.

Total: $2 + 3 + 1 = 6$ conjuntos quadruplexos com sete elementos.

Mais conhecimento de olimpíadas em: **inmea.org**

Questões obtidas do canal Planeta Matemática