



NÍVEL 3

Questão 1

Juca escreveu todos os números de 1000 a 1999 cuja soma dos algarismos é 20 (por exemplo, 1586).

Observação. Os números são da forma $1abc$, com $a + b + c = 19$ e cada algarismo entre 0 e 9.

a) Dentre os números que Juca escreveu, quantos possuem dois algarismos iguais?

Resposta: 15 números.

Se dois dos algarismos a, b, c valem d , o terceiro é $19 - 2d$, que é algarismo para $d = 5, 6, 7, 8, 9$ (terceiro = 9, 7, 5, 3, 1). Os três iguais é impossível ($3d = 19$). Cada caso dá 3 posições: $5 \cdot 3 = 15$.
1559, 1595, 1955; 1667, 1676, 1766; 1577, 1757, 1775; 1388, 1838, 1883; 1199, 1919, 1991.
Um algarismo igual ao 1 inicial obriga os outros dois a somar 18, ou seja, 9 e 9, casos já contados (1199, 1919, 1991).

b) Dentre os números que Juca escreveu, quantos possuem o algarismo 4?

Resposta: 12 números.

Se um dos algarismos a, b, c é 4, os outros dois somam 15: (6, 9), (7, 8), (8, 7) ou (9, 6). Dois algarismos 4 é impossível (o terceiro seria 11). São 3 posições para o 4 e 4 pares: $3 \cdot 4 = 12$.
1469, 1478, 1487, 1496, 1649, 1694, 1748, 1784, 1847, 1874, 1946, 1964.

c) Quantos números Juca escreveu?

Resposta: 45 números.

Para cada a , temos $b + c = 19 - a$. Se essa soma é $s \geq 10$, existem $19 - s$ pares (b, c) de algarismos, ou seja, a pares. Para $a = 0$ não há solução ($s = 19$). Total: $1 + 2 + \dots + 9 = 45$.

Questão 2

Um conjunto de algarismos não nulos é chamado de *quadruplexo* quando o quádruplo de um de seus elementos é igual à soma de todos os outros elementos. Por exemplo, $\{2, 3, 5\}$ ($4 \times 2 = 3 + 5$), $\{2, 4, 6, 8\}$ ($4 \times 4 = 2 + 6 + 8$) e $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ($4 \times 9 = 1 + 2 + \dots + 8$) são quadruplexos.

a) Encontre um conjunto quadruplexo com cinco elementos.

Resposta: por exemplo, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, pois $4 \times 3 = 12 = 1 + 2 + 4 + 5$.

Outro exemplo: $\{1, 3, 4, 5, 7\}$, pois $4 \times 4 = 16 = 1 + 3 + 5 + 7$.

b) Explique por que a soma dos elementos de um conjunto quadruplexo é sempre um múltiplo de 5.

Resposta: Se x é o elemento especial, a soma dos outros é $4x$. Então a soma de todos os elementos é $x + 4x = 5x$, um múltiplo de 5.

c) Encontre um conjunto quadruplexo com oito elementos.

Resposta: $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$, pois $4 \times 8 = 32 = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 9$.

Há só 9 algarismos não nulos, então o conjunto é $\{1, \dots, 9\}$ sem um algarismo d . A soma $45 - d$ deve ser múltipla de 5, logo $d = 5$, a soma é $40 = 5 \cdot 8$, e o elemento especial é 8.

d) Explique por que existem somente seis conjuntos quadruplexos com sete elementos.

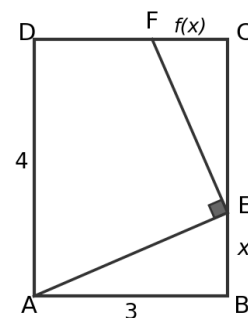
Resposta: O conjunto é $\{1, \dots, 9\}$ sem dois algarismos a e b . A soma $45 - (a + b) = 5x$, com x no conjunto. Logo $a + b$ é múltiplo de 5: vale 5, 10 ou 15, e então $x = 8, 7$ ou 6. Também é preciso que x não seja um dos retirados.

- $a + b = 5, x = 8$: retirar $\{1, 4\}$ ou $\{2, 3\}$. 2 conjuntos.
- $a + b = 10, x = 7$: $\{1, 9\}, \{2, 8\}, \{4, 6\}$ (o par $\{3, 7\}$ retira o 7). 3 conjuntos.
- $a + b = 15, x = 6$: $\{7, 8\}$ (o par $\{6, 9\}$ retira o 6). 1 conjunto.

Total: $2 + 3 + 1 = 6$ conjuntos.

Questão 3

Considere o retângulo $ABCD$ em que $AB = 3$ e $BC = 4$. Seja E um ponto que se move sobre o lado BC . Traçamos um segmento EF perpendicular a AE de modo que o ponto F esteja sobre o lado CD , como mostra a figura. Considere f a função que associa $x = BE$ a $f(x) = CF$.



Fórmula. Como o ângulo AEF é reto, os ângulos AEB e FEC somam 90° . Assim, o ângulo BAE é igual ao ângulo CEF , e os triângulos retângulos ABE e ECF são semelhantes:

$$AB/BE = EC/CF, \text{ ou seja, } 3/x = (4 - x)/f(x).$$

Logo $f(x) = x(4 - x)/3$, para $0 \leq x \leq 4$.

a) Calcule $f(1)$.

Resposta: $f(1) = 1$.

$$f(1) = 1 \cdot (4 - 1)/3 = 3/3 = 1.$$

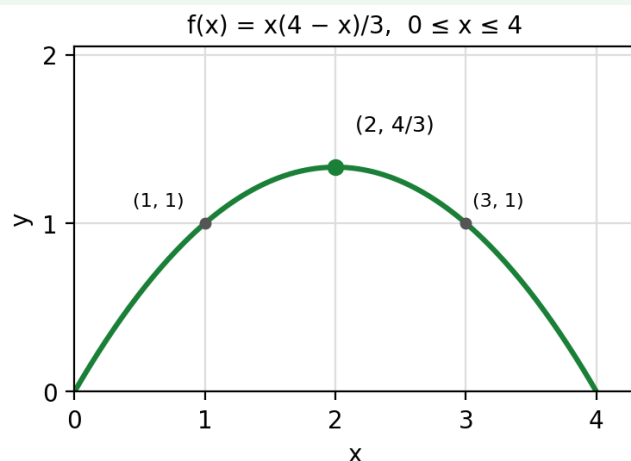
b) Encontre o valor de x para o qual a função f assume seu maior valor.

Resposta: $x = 2$ (e o valor máximo é $f(2) = 4/3$).

$f(x) = (4 - (x - 2)^2)/3$, máxima quando $(x - 2)^2 = 0$. Ou: a parábola tem raízes 0 e 4, e o vértice fica no ponto médio, $x = 2$.

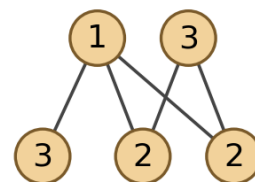
c) Esboce o gráfico da função f .

Resposta: arco de parábola com concavidade para baixo, de $(0, 0)$ a $(4, 0)$, passando por $(1, 1)$ e $(3, 1)$, com vértice em $(2, 4/3)$.

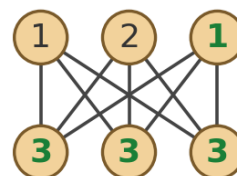
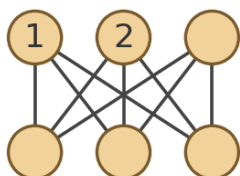


Questão 4

Os círculos dos diagramas abaixo devem ser preenchidos com os números 1, 2 ou 3, um número em cada círculo, de forma que círculos ligados por um segmento tenham números diferentes. A figura ao lado mostra um possível preenchimento de um diagrama.



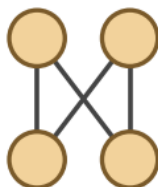
a) Complete o diagrama abaixo com um possível preenchimento correto.



Resposta: Em cima: 1, 2, 1 (ou 1, 2, 2). Embaixo: 3, 3, 3.

Cada círculo de baixo está ligado aos três de cima. Como em cima já aparecem 1 e 2, todos os círculos de baixo têm de ser 3. O terceiro círculo de cima só está ligado a círculos com 3, então pode ser 1 ou 2.

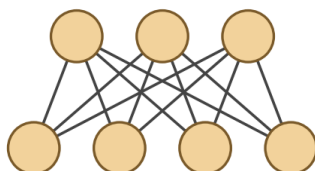
b) De quantas maneiras é possível preencher corretamente o diagrama abaixo?



Resposta: 18 maneiras.

Cada círculo de cima está ligado aos dois de baixo. Se os dois de cima têm o mesmo número (3 escolhas), cada círculo de baixo tem 2 opções: $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$. Se os de cima são diferentes ($3 \cdot 2 = 6$ escolhas), os de baixo têm de ser o número que falta: $6 \cdot 1 = 6$. Total: $12 + 6 = 18$.

c) De quantas maneiras é possível preencher corretamente o diagrama abaixo?



Resposta: 66 maneiras.

Cada círculo de cima está ligado aos quatro de baixo, então nenhum número pode aparecer ao mesmo tempo em cima e embaixo.

- Os três de cima iguais (3 escolhas): cada um dos 4 de baixo tem 2 opções, $2^4 = 16$. Total: $3 \cdot 16 = 48$.
 - Em cima usam exatamente dois números: escolhemos o par (3 modos) e preenchemos os 3 círculos com esses dois números usando ambos ($2^3 - 2 = 6$ modos): 18 preenchimentos. Embaixo, todos recebem o número restante: 1 modo. Total: 18.
 - Em cima usam os três números: embaixo não há opção. Total: 0.
- Ao todo: $48 + 18 = 66$.

Questão 5

Uma caixa contém 20 bolas, numeradas de 1 a 20. As bolas são idênticas, exceto pelo número. Floriano retira bolas dessa caixa, uma de cada vez, sem devolução.

- a) Se Floriano retirar duas bolas, qual é a probabilidade de a soma dos números das bolas retiradas ser ímpar?

Resposta: 10/19.

A soma é ímpar quando uma bola é par e a outra é ímpar. Seja qual for a primeira bola, das 19 restantes, 10 têm paridade diferente da dela. Probabilidade: 10/19.

- b) Se Floriano retirar três bolas, qual é a probabilidade de os números das bolas retiradas estarem em ordem crescente?

Resposta: 1/6.

Três números distintos podem sair em $3! = 6$ ordens igualmente prováveis, e só uma delas é crescente.

- c) Se Floriano retirar cinco bolas, qual é a probabilidade de que os números da primeira, segunda e terceira bolas estejam em ordem crescente e de que os números da terceira, quarta e quinta bolas estejam em ordem decrescente?

Resposta: 1/20.

Os cinco números podem sair em $5! = 120$ ordens igualmente prováveis. Para a condição valer, a terceira bola tem de ser a maior das cinco. Das outras quatro, escolhemos quais 2 vêm antes, em $C(4, 2) = 6$ modos. A ordem de cada lado fica então determinada (crescente antes, decrescente depois). Probabilidade: $6/120 = 1/20$.

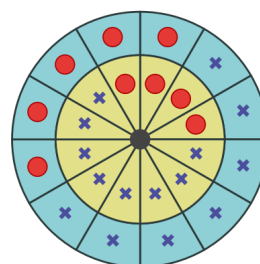
Questão 6

O objeto da figura é formado por dois discos concêntricos sobrepostos, com 12 setores cada.

- No disco interno, foram colados 4 adesivos ● e 8 adesivos ×;
- No disco externo, serão colados 5 adesivos ● e 7 adesivos ×.

O disco interno está fixo e o externo gira até parar com os setores alinhados.

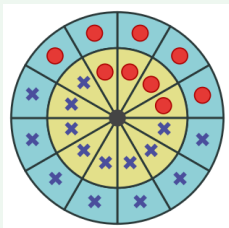
- a) Na figura ao lado, os adesivos foram colados e o disco externo parou com 7 pares de símbolos iguais alinhados. Se ele girar novamente, qual é o número máximo e o número mínimo de alinhamentos de símbolos iguais que podem ocorrer?



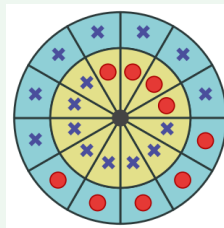
Resposta: Máximo = 11 e mínimo = 3.

Seja r o número de pares ●–● alinhados. Ficam alinhados com ● do disco interno ou do externo $4 + 5 - r$ setores; os outros $12 - (9 - r) = 3 + r$ setores são pares ×–×. Total de alinhamentos iguais: $r + 3 + r = 3 + 2r$. (Na figura, $r = 2$, total 7.)

No disco interno, os 4 ● estão em setores consecutivos; no externo, os 5 ● também. Girando, o bloco de 5 pode cobrir todo o bloco de 4 ($r = 4$, total 11) ou ficar totalmente fora dele ($r = 0$, total 3), pois $4 + 5 \leq 12$.

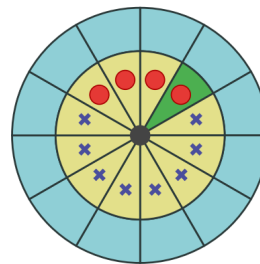


Posição com 11 alinhamentos



Posição com 3 alinhamentos

- b) Imagine agora que os 5 adesivos ● e os 7 adesivos ✕ sejam colocados de modo aleatório nos setores do disco externo. Em quantas, das 12 posições que o disco externo pode parar, o símbolo do setor destacado em verde no disco interno ficará alinhado a um símbolo igual no disco externo?



Resposta: Em 5 posições.

O setor verde tem um ●. Nas 12 posições, cada setor do disco externo passa exatamente uma vez pelo setor verde. Haverá alinhamento igual exatamente quando passar um dos 5 setores com ●, qualquer que seja a colagem.

- c) Explique por que, para cada maneira de como os 5 adesivos ● e os 7 adesivos ✕ forem colocados, em pelo menos uma das 12 posições em que o disco externo pode parar ocorrerão, no mínimo, 7 alinhamentos de símbolos iguais.

Resposta: Somamos os alinhamentos iguais nas 12 posições. Pelo item b, cada um dos 4 setores ● internos fica alinhado com ● em 5 posições: $4 \cdot 5 = 20$. Da mesma forma, cada um dos 8 setores ✕ internos fica alinhado com ✕ em 7 posições: $8 \cdot 7 = 56$.

Total nas 12 posições: $20 + 56 = 76$. Se em todas as posições houvesse no máximo 6 alinhamentos, o total seria no máximo $12 \cdot 6 = 72 < 76$. Logo, em pelo menos uma posição há 7 ou mais alinhamentos iguais.

Mais conhecimento de olimpíadas em: inmea.org

Questões obtidas do canal Planeta Matemática